DN5 : Les polynômes orthogonaux et la méthode de Gauss

Leçons : 409, 220, 417, 421 ; Référence : NDEM

Notations et rappels : On note $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ *avec* $a < b$ *et* ω *une application de* $]a,b[$ *vers* $\mathbb{R}_+^*$ *continue telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b |x|^n \omega(x).dx < \infty$*, on note* E *l'ensemble des applications* f *continues de* $]a,b[$ *vers* $\mathbb{R}$ *telles que* $\int_a^b f^2\omega < \infty$ *et* $\forall (f,g) \in E^2, \langle f|g\rangle = \int_a^b fg\omega$*, on rappelle que* E *muni du produit scalaire* $\langle\, .\, |\, .\, \rangle$ *est un espace de Hilbert et on note* $\|\, .\, \|$ *la norme associée au produit scalaire, on remarque que* E *contient* $\mathbb{R}[X]$

<u>Théorème 1 :</u> Il existe une unique suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(\pi_n) = n$. *On dit que* $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite de polynômes orthogonaux relative à* ω

On construit $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, on a $\pi_0 = e_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on suppose dans la suite $(\pi_0, \dots, \pi_{n-1})$ construits, comme $\forall i \in [\![1, n-1]\!], \deg(\pi_i) = i$ on sait que $(\pi_0, \dots, \pi_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\exists \left(\lambda_{i,n}\right)_{0\le i\le n-1} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\pi_n = e_n - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{i,n}\pi_i$, de plus $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \langle \pi_n|\pi_k\rangle = 0 \Rightarrow \langle e_n|\pi_k\rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{i,n}\langle \pi_i|\pi_k\rangle = \langle e_n|\pi_k\rangle - \lambda_{k,n}\|\pi_k\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{k,n} = \frac{\langle e_n|\pi_k\rangle}{\|\pi_k\|^2}$ donc $\pi_n = e_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle e_n|\pi_i\rangle}{\|\pi_i\|^2}\pi_i$ ce qui prouve l'existence et l'unicité de $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

<u>Application :</u> $\forall (n,f) \in \mathbb{N} \times E$ la distance de f à $\mathbb{R}_n[X]$ est $\|f - p_n\|$ avec $p_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f|\pi_i\rangle}{\|\pi_i\|^2}\pi_i$ le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[X]$. *On dit que* p_n *est le polynôme de meilleure approximation quadratique de* f *à l'ordre* n

<u>Théorème 2 :</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n$ possède n racines distinctes dans $]a,b[$

Comme $\langle \pi_n|\pi_0\rangle = 0$ on sait que π_n admet une racine dans $]a,b[$ et on peut noter $(x_i)_{1\le i\le p}$ les racines distinctes de π_n dans $]a,b[$ et $(m_i)_{1\le i\le p}$ leurs multiplicités respectives, on note $\forall i \in [\![1,p]\!], \varepsilon_i = 1$ si m_i est impair et 0 sinon puis $Q = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)^{\varepsilon_i}$, on remarque que $\forall i \in [\![1,p]\!], x_i$ est une racine de $\pi_n Q$ dans $]a,b[$ de multiplicité paire donc $\pi_n Q$ admet un extremum local en x_i et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires il vient que ces extrémums sont tous des minimums ou tous des maximums puis que $\pi_n Q$ est de signe constant dans $]a,b[$, on déduit que $\langle \pi_n|Q\rangle \neq 0$ et comme π_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a finalement $p \ge \deg Q \ge n \ge p$ puis $p = n$

<u>Théorème 3 :</u> (Méthode de Gauss) $\forall p \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\{x_0, \dots, x_p\} \subset\,]a,b[$ de cardinal $p+1$ et un unique $\{\lambda_0, \dots, \lambda_p\} \subset \mathbb{R}$ tels que $\forall f \in \mathbb{R}_{2p+1}[X], \int_a^b f\omega = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i . f(x_i)$

• Démontrons l'unicité, on note $Q = \prod_{i=0}^{p}(X - x_i)$ et on a $\forall P \in \mathbb{R}_p[X], \langle P|Q\rangle = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i . (PQ)(x_i) = 0$ donc Q est orthogonal à $\mathbb{R}_p[X]$ et unitaire, on déduit que $Q = \pi_{p+1}$ puis que $(x_i)_{0\le i\le p}$ sont les racines de π_{p+1} , d'autre part si on note $\forall k \in [\![0,p]\!], L_k = \prod_{0\le i\le p}^{i\neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} \in \mathbb{R}_p[X]$ alors $\langle L_k|1\rangle = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i . L_k(x_i) = \lambda_k$

• Démontrons l'existence, on note $(x_i)_{0\le i\le p}$ les racines distinctes de π_{p+1} dans $]a,b[$ d'après le théorème 2 et on pose $\forall i \in [\![0,p]\!], \lambda_i = \langle L_i|1\rangle$, on effectue la division euclidienne de f par π_{p+1} pour noter $f = \pi_{p+1}q + r$ avec $(q,r) \in \mathbb{R}_p[X]^2$ puisque $\deg f \le 2p+1$, il vient $\langle f|1\rangle = \langle \pi_{p+1}q|1\rangle + \langle r|1\rangle = \langle \pi_{p+1}|q\rangle + \langle r|1\rangle = \langle r|1\rangle$ mais $r = \sum_{i=0}^{p} r(x_i).L_i = \sum_{i=0}^{p} f(x_i).L_i$ car $(L_i)_{0\le i\le p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$ donc $\langle f|1\rangle = \sum_{i=0}^{p} f(x_i).\langle L_i|1\rangle = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i . f(x_i)$

<u>DEVELOPPEMENT SOUS LA FORME D'UN EXERCICE :</u>

1) Montrer que Il existe une unique suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(\pi_n) = n$
2) $\forall (n,f) \in \mathbb{N} \times E$ calculer la distance de f à $\mathbb{R}_n[X]$
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n$ possède n racines distinctes dans $]a,b[$
4) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\{x_0, \dots, x_p\} \subset\,]a,b[$ de cardinal $p+1$ et un unique $\{\lambda_0, \dots, \lambda_p\} \subset \mathbb{R}$ tels que $\forall f \in \mathbb{R}_{2p+1}[X], \int_a^b f\omega = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i . f(x_i)$